НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра технологии вяжущих веществ и бетонов

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания к выполнению курсовой работы / проекта
для обучающихся по направлению подготовки 08.04.01 Строительство

Составители:
О.В. Александрова, В.Г. Соловьев, О.Н. Староверова

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2020

УДК 691.3:311
ББК 38.3
М54

Рецензент — доктор физико-математических наук *Т.А. Мацеевич*,
заведующая кафедрой прикладной математики НИУ МГСУ

М54 **Методы исследования и контроля качества строительных материалов** [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению курсовой работы / проекта для обучающихся по направлению подготовки 08.04.01 Строительство / сост. : О.В. Александрова, В.Г. Соловьев, О.Н. Староверова ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра технологии вяжущих веществ и бетонов. — Электрон. дан. и прогр. (0,63 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020. — Режим доступа: http://lib.mgsu.ru. — Загл. с титул. экрана.

Методические указания предназначены для выполнения обучающимися курсовой работы по дисциплине «Методы исследования и контроля качества строительных материалов».

Для обучающихся по направлению подготовки 08.04.01 Строительство.

Учебное электронное издание

Редактор, корректор *Л.В. Светличная*
Компьютерная правка и верстка *О.В. Суховой*
Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2010, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию 01.06.2020. Объем данных 0,63 Мб.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Планирование эксперимента — раздел математической статистики, изучающий методы организации экспериментальных исследований для получения наиболее достоверной информации о свойствах исследуемого объекта.

Эксперимент — целенаправленное воздействие на объект исследования с целью получения достоверной информации.

Планирование эксперимента — это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

При планировании эксперимента важно: стремление к минимизации общего числа опытов; одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс; использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора; выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

Задачи, для решения которых может использоваться планирование эксперимента: поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, выбор существенных факторов, выбор наиболее приемлемых из некоторого множества гипотез о механизме решений и т.д.

1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Схематически объект исследования часто представляют в виде так называемого «черного ящика», т.е. объекта, в котором для наблюдения доступны только входные и выходные величины (рис. 1). Выходные величины (y) изображены на этом рисунке выходящими стрелками, а факторы — варьируемые (x), контролируемые (z) и неконтролируемые (w) — входящими стрелками. Названием «черный ящик» подчеркивается полное или частичное отсутствие знаний о внутренней структуре объекта исследования.

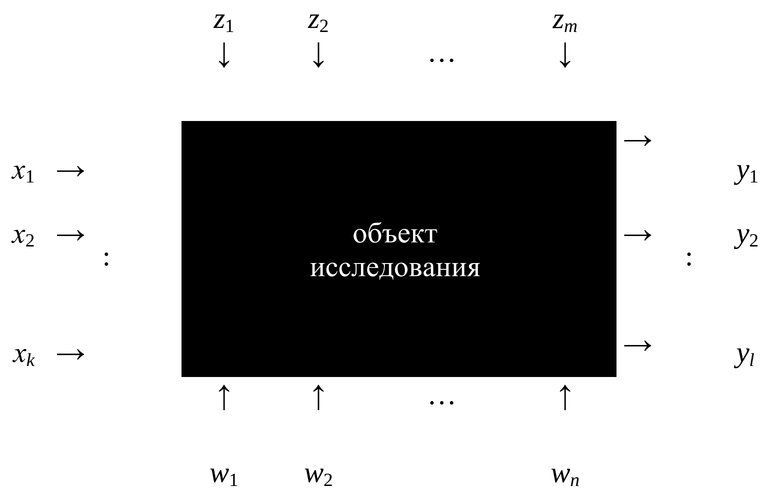

Рис. 1. Схематическое изображение объекта исследования

Для решения задач оптимизации используются математические модели исследования. Под математической моделью понимаем уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде можно записать так:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — функция отклика.

Каждый фактор может принимать в опыте одно или несколько значений. Эти значения называются уровнями. Для облегчения построения эксперимента фактор должен иметь определенное число дискретных уровней. Фиксированный набор уровней — это условие проведения опыта. Если перебрать все возможные наборы состояний, то получится множество различных состояний «черного ящика». Одновременно это будет число возможных различных опытов.

Число возможных опытов определяется по выражению $N = p^k$, где N — число опытов, p — число уровней, k — число факторов.

Реальные объекты обычно обладают огромной сложностью. Так, на первый взгляд, простая система с пятью факторами на пяти уровнях (5^5) имеет 3125 состояний (опытов), а для десяти факторов на четырех уровнях — их уже свыше миллиона. В этих случаях выполнение всех опытов практически невозможно. Возникает вопрос, сколько и каких опытов нужно включить в эксперимент, чтобы решить поставленную задачу? Здесь-то и применяется планирование эксперимента.

Эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте задаются, является активным экспериментом.

Эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются, называют пассивным экспериментом.

2. ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Одним из главных этапов работы на стадии предварительного изучения объекта исследования является выбор параметров оптимизации (критериев оптимизации).

Под параметром оптимизации понимают характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной системы.

Требования к параметру оптимизации

Параметр оптимизации — это признак, по которому оптимизируется процесс.

Параметр оптимизации должен быть количественным, задаваться числом. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, называется областью его определения. Области определения могут быть непрерывными (значения непрерывно заполняют некоторый промежуток) и дискретными (принимающими отдельные друг от друга значения), ограниченными и неограниченными.

Например, выход бетонной смеси — это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения, он может изменяться в интервале от 0 до 100 %. Число бракованных изделий — параметр с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Параметр оптимизации должен выражаться одним числом.

Параметр оптимизации должен быть однозначным в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение выходного параметра оптимизации, при этом обратное неверно: т.е. одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.

Параметр оптимизации должен оценивать эффективность функционирования системы.

Параметр оптимизации должен быть универсальным.

Параметр оптимизации должен иметь физический смысл, быть простым и легко вычисляемым.

3. ВЫБОР ФАКТОРОВ

После выбора объекта исследования и параметра оптимизации необходимо рассмотреть все факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным и принимающим произвольные значения, не контролируемые экспериментатором, то это значительно увеличит ошибку опыта. При поддержании этого фактора на определенном уровне может быть получено ложное представление об оптимуме, так как нет гарантии, что полученный уровень является оптимальным.

С другой стороны, большое число факторов увеличивает число опытов и размерность факторного пространства. В разделе 1 указано, что число опытов равно k^p, где p — число уровней, а k — число факторов. Встает вопрос о сокращении числа опытов.

Характеристики факторов

Фактор — измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение и влияющая на объект исследования.

Фактор должен иметь область определения, внутри которой задаются его конкретные значения. Область определения может быть непрерывной или дискретной. При планировании эксперимента значения факторов принимаются дискретными, это связано с уровнями факторов. В практических задачах области определения факторов имеют ограничения, которые носят либо принципиальный, либо технический характер.

Факторы разделяются на количественные и качественные.

Количественные факторы можно оценивать количественно, т.е. измерять, взвешивать и т.д. При этом любое значение количественного фактора исчерпывающе и однозначно характеризуется некоторым единственным числом.

Качественные факторы — это различные вещества, технологические способы, приборы, исполнители и т.п.

При планировании эксперимента к качественным факторам применяют условную порядковую шкалу в соответствии с уровнями, т.е. производится кодирование. Порядок уровней здесь произволен, но после кодирования он фиксируется.

Целью большинства экспериментальных исследований является изучение влияния различных факторов на объект исследования.

Факторы могут быть основными и побочными, посторонними. Основные факторы участвуют в эксперименте. Одни из них варьируются (изменяются) при исследовании технологического процесса, и тогда их называют варьируемыми факторами. Другие стабилизируются на определенном уровне. Побочные, посторонние факторы желательно по возможности устранять.

Факторы, действуя на объект, изменяют его состояние. Параметр, по которому судят об изменении состояния объекта, называют выходной величиной объекта или откликом.

Варьируемые факторы обозначаются буквой x_i индексом, соответствующим номеру фактора, т.е. $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Выходные величины обозначаются $y_1, y_2, \ldots, y_l$ (рис. 1).

На объект исследования также воздействуют неуправляемые факторы. Одни из них $z_1, z_2, \ldots, z_m$ контролируются в процессе постановки опыта без целенаправленного их изменения и потому называются контролируемыми; другие $w_1, w_2, \ldots, w_n$ являются неконтролируемыми и относятся к возмущающим воздействиям.

Требования к факторам

От правильного выбора факторов зависит успех оптимизации.

Для проведения активного эксперимента факторы должны быть:

управляемыми — выбранное нужное значение фактора поддерживается постоянным в течение всего опыта;

независимыми — значение фактора на любом уровне не зависит от уровней остальных факторов;

совместимыми — возможность реализации в эксперименте любых комбинаций уровней факторов из области значений.

Выбор уровня варьирования факторов и основного уровня

Фактор считается заданным, если указаны его название и область определения. В выбранной области определения он может иметь несколько значений, которые соответствуют числу его различных состояний. Выбранные для эксперимента количественные или качественные состояния фактора — уровни фактора.

Область значений фактора — совокупность значений данного фактора, которые он принимает в эксперименте.

Диапазон варьирования фактора — наименьший отрезок, внутри которого находятся все значения, принимаемые данным фактором в эксперименте.

Диапазон варьирования x_i фактора ($i = 1, 2, \ldots, k$) имеет вид

$$x_{i\,\min} \le x_i \le x_{i\,\max},$$

где $x_{i\,\max}$ — верхний уровень фактора x_i, $x_{i\,\min}$ — нижний уровень фактора.

Середина диапазона варьирования фактора x_i — основной уровень и обозначается $x_i^{(0)}$: $x_i^{(0)} = (x_{i\,\min} + x_{i\,\max})/2$.

Разность $\Delta_i = x_{i\,\max} - x_i^{(0)} = x_i^{(0)} - x_{i\,\min}$ — интервал варьирования фактора x_i.

В планировании эксперимента значения факторов, соответствующие определенным уровням их варьирования, выражают в кодированных величинах.

Значение натурального фактора с его нормализованным (кодированным) обозначением связано формулой

$$x_i = (X_i - X_i^{(0)}) / \Delta_i, \tag{1}$$

где x_i — нормализованное (кодированное) значение фактора; X_i — натуральное значение фактора.

При кодировании факторов интервал варьирования принимается равным единице.

При выборе области значений факторов выбирают нулевую точку, или нулевой (основной) уровень. Выбор нулевой точки эквивалентен определению исходного состояния объекта исследования.

Оптимизация связана с улучшением состояния объекта по сравнению с состоянием в нулевой точке. Поэтому желательно, чтобы данная точка была в области оптимума или как можно ближе к ней, тогда ускоряется поиск оптимальных решений.

Если проведению эксперимента предшествовали другие исследования по рассматриваемому вопросу, то за нулевую принимается такая точка, которой соответствует наилучшее значение параметра оптимизации, установленного в результате формализации априорной информации. В этом случае нулевыми уровнями факторов являются те значения последних, сочетания которых соответствуют координатам нулевой точки.

После установления нулевой точки выбирают интервалы варьирования факторов. Это связано с определением значений факторов, которые в кодированных величинах соответствуют +1 или (+) — верхний уровень варьирования фактора и –1 или (–) — нижний уровень варьирования фактора. Интервалы варьирования выбирают с учетом того, что значения факторов, соответствующие уровням +1 и –1, должны быть достаточно отличимы от значения, соответствующего нулевому уровню.

При выборе интервала варьирования необходимо учитывать число уровней варьирования факторов в области эксперимента. От числа уровней зависят объем эксперимента и эффективность оптимизации. Минимальное число уровней, применяемое на первой стадии работы, равно двум.

Варьирование факторов на двух уровнях используется в отсеивающих экспериментах, на стадии движения в область оптимума и при описании объекта исследования линейными моделями. Такое число уровней недостаточно для построения моделей второго порядка. С увеличением числа уровней повышается чувствительность эксперимента, но одновременно возрастает число опытов. При построении моделей второго порядка необходимы 3, 4 или 5 уровней, наличие нечетных уровней указывает на проведение опытов в нулевых (основных) уровнях. В каждом отдельном случае число уровней выбирают с учетом условий задачи и предполагаемых методов планирования эксперимента.

4. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Зависимость выходной величины (отклика) y от варьируемых факторов X_1, X_2, …, X_k, полученная с применением регрессионного анализа, называется регрессионной моделью:

$$y = f(X_1, X_2, \dots, X_k), \tag{2}$$

где $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ — обозначение некоторой функции от варьируемых факторов, называемой функцией отклика.

Выходных величин может быть несколько. Тогда зависимость вида (2) строится для каждого отклика.

Построенная регрессионная модель позволяет получить информацию о самом объекте и о способах управления им. С помощью регрессионной модели легко оценить степень и характер влияния каждого из факторов на выходную величину; модель может послужить основой для оптимизации процесса.

Вид регрессионной модели задается заранее, или до проведения эксперимента определяется, к какому классу относится функция $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$. Например, регрессионная модель может быть в виде многочлена (полинома) определенного порядка, либо в виде экспоненты, тригонометрического многочлена и т.д. Наиболее часто при планировании эксперимента применяются регрессионные модели объектов в виде многочленов (полиномов) первого и второго порядка от варьируемых факторов.

Полином первой степени: модель в виде многочлена первого порядка сокращенно называют регрессионной моделью первого порядка, или линейной. В общем случае, при наличии k варьируемых факторов линейная регрессионная модель объекта имеет вид

$$y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \ldots + B_k X_k, \qquad (3)$$

где B_0, B_1, $B_2 \ldots + B_k$ — коэффициенты, числовые значения которых определяются по результатам эксперимента. Их называют коэффициентами регрессии, а уравнение (3) или в общем случае уравнение (2) — уравнением регрессии. Коэффициенты B_1, $B_2 \ldots + B_k$, стоящие перед обозначениями факторов X_1, X_2, …, X_k, называют линейными коэффициентами, а коэффициент B_0 — свободным членом.

Выбор регрессионной модели первого порядка для описания объекта равносилен предположению о линейной зависимости выходной величины от каждого из факторов, т.е. утверждению о том, что выходная величина изменяется пропорционально изменению варьируемого фактора.

Представление регрессионной модели в виде многочлена первого порядка предполагает отсутствие эффектов взаимодействия между факторами. Это означает, что степень и характер влияния каждого фактора на выходную величину не зависят от уровней варьирования остальных факторов.

Линейная регрессионная модель дает, как правило, приближенное представление о влиянии факторов на объект. Применение таких моделей оправдано в следующих основных случаях: на начальных этапах исследования объекта или в других ситуациях, когда экспериментатора удовлетворяет ограниченная точность линейного приближения; при жестком ограничении на количество опытов, поскольку экспериментальные планы, позволяющие получить линейную модель, являются экономными; в ситуации, когда экспериментатор уверен в достоверности линейной модели, например, по результатам теоретических исследований.

Модели второго порядка, т.е. модели в виде многочленов второго порядка от варьируемых факторов. Модель второго порядка (иначе — квадратичная модель), для трех варьируемых факторов имеет вид:

$$y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + B_{33} X_3^2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{13} X_1 X_3 + B_{23} X_2 X_3. \qquad (4)$$

Эта модель содержит, во-первых, все слагаемые линейной модели: B_0 — свободный член; B_1X_1, B_2X_2, …, B_kX_k — линейные члены. Дополнительно к этому модель второго порядка включает квадратичные члены: $B_{11} X_1^2$, $B_{22} X_2^2$, … , $B_{kk} X_k^2$ и члены с парными взаимодействиями: $B_{12} X_1 X_2$, $B_{13} X_1 X_3$, …, $B_{1k} X_1 X_k$, $B_{23} X_2 X_3$, $B_{24} X_2 X_4$, …, $B_{2k} X_2 X_k$, …, $B_{k-1k} X_{k-1} X_k$.

Описание объекта квадратичной моделью дает заведомо плохие результаты, если истинная зависимость отклика от некоторого фактора X_i имеет более одного экстремума; зависимость $y = f(X)$ имеет точку перегиба; при некотором значении X_i значение отклика резко (скачком) изменяется.

5. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ПЛАН ПФП

Первый этап планирования эксперимента для получения линейной модели основан на варьировании факторов на двух уровнях. При известном числе факторов определяется число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов. Формула для расчета числа опытов приводилась в разделе 1 и в этом случае выглядит $N = 2^k$.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным планом (ПФП). Если число уровней факторов равно двум, то имеем ПФП типа 2^k.

Условия эксперимента записываются в виде таблицы, которая называется матрицей планирования эксперимента. Матрица планирования для двух факторов приведена в табл. 1.

Таблица 1

Матрица планирования ПФП 2^2

№ опыта	x_1	x_2	y
1	+1	+1	y_1
2	–1	+1	y_2
3	+1	–1	y_3
4	–1	–1	y_4

С увеличением числа факторов построение матрицы планирования усложняется. Существует несколько приемов перехода от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности [1].

Пример построения матриц планирования 2^3 (см. табл. 2).

Таблица 2

Матрица планирования ПФП 2^3

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	y_1
2	–	+	+	y_2
3	+	–	+	y_3
4	–	–	+	y_4
5	+	+	–	y_5
6	–	+	–	y_6
7	+	–	–	y_7
8	–	–	–	y_8

Свойства полного факторного плана типа 2^k

Два свойства следуют непосредственно из построения матрицы.

1. Симметричность относительно центра эксперимента — алгебраическая сумма элементов вектора-столбца каждого фактора равна нулю, или

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 0, \qquad (5)$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$ — номер фактора, N — число опытов.

2. Нормировка — сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 = N. \qquad (6)$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются + 1 и –1.

Свойства совокупности столбцов.

3. Ортогональность — сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю, или

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}x_{ju} = 0, \qquad (7)$$

при $i \neq u$, а также $i, u = 0, 1, ..., k$.

4. Ротатабельность, точность предсказаний значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Расчет коэффициентов регрессии

Построив матрицу планирования, осуществляют эксперимент. Получив экспериментальные данные, рассчитывают значения коэффициентов регрессии.

Значение свободного члена (b_0) берут как среднее арифметическое всех значений параметра оптимизации в матрице:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j}{N}, \quad (8)$$

где y_j — значения параметра оптимизации в j-м опыте; N — число опытов в матрице.

Линейные коэффициенты регрессии рассчитывают по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^{j=N} x_{ij}^2} = \frac{\sum_1^N x_{ij} y_j}{N}, \quad (9)$$

где x_{ij} — кодированное значение фактора x_i в j-м опыте.

Коэффициенты регрессии, характеризующие парное взаимодействие факторов, находят по формуле

$$b_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{uj} y_j}{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2} = \frac{\sum_1^N x_{ij} x_{uj} y_j}{N}. \quad (10)$$

Пример расчета коэффициентов регрессии для планирования 2^2, матрица планирования которой приведена в табл. 1.

$$b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \; b_1 = \frac{+y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4};$$

$$b_2 = \frac{+y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}; \; b_3 = \frac{+y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}.$$

Коэффициенты при независимых переменных линейной модели указывают на силу влияния (эффективность) действия факторов, а их знак — на характер действия фактора на параметр оптимизации.

На первом этапе планирования эксперимента стремятся получить линейную модель, но это не гарантирует, что в выбранном факторном пространстве отклик объекта описывается линейной функцией. ПФП позволяет количественно оценить нелинейность функции отклика построением метаматематической модели в виде неполного полинома второй степени, т.к. нелинейность часто бывает связана с тем, что эффект действия на параметр оптимизации одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. В этом случае говорят об эффектах взаимодействия факторов, а модель имеет вид:

$$y = b_0 + \sum_i^k b_i x_i + \sum_i^k b_{ii} x_{ii} \,.$$

Уравнение регрессии для $k = 3$ (ПФП 2^3) имеет вид,
где b_0 — свободный член; b_1, b_2, b_3 — линейные коэффициенты; b_{12}, b_{13}, b_{23} — коэффициенты двойного взаимодействия; b_{123} — коэффициент тройного взаимодействия.

Полная матрица для ПФП 2^3 имеет следующий вид (табл. 3):

Таблица 3

Матрица планирования ПФП 2^3 с действительными (x_1, x_2, x_3) и фиктивными (x_0, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, $x_1x_2x_3$) переменными

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+	+	+	+	+	+	+	+	y_1
2	+	–	+	+	–	–	+	–	y_2
3	+	+	–	+	–	+	–	–	y_3
4	+	–	–	+	+	–	–	+	y_4
5	+	+	+	–	+	–	–	–	y_5
6	+	–	+	–	–	+	–	+	y_6
7	+	+	–	–	–	–	+	+	y_7
8	+	–	–	–	+	+	+	–	y_8

Полное число всех возможных коэффициентов регрессии, включая b_0, линейные коэффициенты и коэффициенты взаимодействий всех порядков, равно числу опытов полного факторного эксперимента [1].

После того как выбраны параметр (или параметры оптимизации), факторы эксперимента и интервалы их варьирования, построена матрица планирования, приступают к проведению опытов согласно выстроенному правилу с получением численных экспериментальных значений параметра оптимизации. Для получения достоверных результатов параметр оптимизации оценивается только в повторных определениях, то есть каждый опыт в матрице должен быть выполнен минимум дважды. Для большинства параметров строительных материалов, изделий и конструкций строго нормированы как методы их определения, так и число контрольных образцов, точек измерений и т.д. Поэтому их количество необходимо принимать не меньшим, чем указано в нормативных документах.

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

B-планы второго порядка

Полные и дробные факторные планы позволяют получить линейное описание зависимости отклика от каждого из варьируемых факторов. При детальном изучении большинства свойств строительных материалов такое представление оказывается слишком грубым. В такой ситуации необходимо обратиться к экспериментальным планам второго порядка.

Планами второго порядка называют такие планы многофакторного эксперимента, с помощью которых можно получить математическое описание объектов в виде полинома второго порядка.

Для трех факторов соответствующее уравнение регрессии записывается в виде

$$y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + B_{33} X_3^2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{13} X_1 X_3 + B_{23} X_2 X_3.$$

В общем случае, когда число варьируемых факторов равно k, модель имеет вид

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<1}^{k} b_{ij} x_i x_j. \quad (11)$$

Число коэффициентов регрессии такой модели определяется по формуле

$$p = \frac{1+2k+k(k-1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (12)$$

Из выражения (11) видно, что реализация плана второго порядка позволяет описать зависимость выходной величины от каждого фактора в виде уравнения параболы.

В B-планах второго порядка каждый фактор X_i варьируется на трех уровнях, т.е. принимает в каждом опыте одно из трех значений: наименьшее $X_{i\ \min}$, наибольшее $X_{i\ \max}$ и среднее $X_i^0 = (X_{i\ \min}+X_{i\ \max})/2$. В нормализованных обозначениях эти уровни обозначаются соответственно –1, +1, 0.

Назовем *звездной точкой* B-плана условия опыта, в котором один из факторов принимает нормализованное обозначение +1 или –1, а остальные фиксируются на основном уровне (ноль в кодовых обозначениях).

При числе факторов k имеется $2k$ различных звездных точек.

B-план состоит из точек полного факторного плана ПФП, к которым добавлено $2k$ звездных точек. Общее число опытов B-плана, таким образом, равно

$N = 2^k+2k$. Для $k = 5$ B-план с ПФП содержит $2^5+2\cdot5 = 42$ опыта. В табл. 4 и 5 приведены B-планы для $k = 2$ и $k = 3$.

Таблица 4

B-план для $k = 2$ (план B_2)

№ опыта		x_1	x_2	№ опыта		x_1	x_2
ПФП	1	–1	–1	Звездные точки	5	–1	0
	2	+1	–1		6	+1	0
	3	–1	+1		7	0	–1
	4	+1	+1		8	0	+1

Таблица 5

B-план для k = 3 (план B_3)

№ опыта		x_1	x_2	x_3	№ опыта		x_1	x_2	x_3
ПФП	1	–1	–1	–1	Звездные точки	9	–1	0	0
	2	+1	–1	–1		10	+1	0	0
	3	–1	+1	–1		11	0	–1	0
	4	+1	+1	–1		12	0	+1	0
	5	–1	–1	+1		13	0	0	–1
	6	+1	–1	+1		14	0	0	+1
	7	–1	+1	+1					
	8	+1	+1	+1					

Опыты, входящие в состав B-плана, обычно называют его ортогональной частью.

Все опыты B-плана расположены на границах области варьирования факторов, в области центра плана, т.е. при значениях факторов, близких к основному уровню, опытов не ставится. Из-за этого точность регрессионной модели близи центра плана оказывается недостаточно высокой. Если построенная по результатам эксперимента модель служит для оптимизации объекта, то данное обстоятельство может не удовлетворять исследователя. B-план может быть дополнен одним или несколькими опытами в центре плана, т.е. опытами, поставленными в условиях $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$. Данные опыты увеличивают точность модели вблизи центра плана. Опыты, повторяющиеся в центре плана, дают возможность оценить дисперсию воспроизводимости, если остальные опыты плана не дублируются. Данный план является разновидностью B-плана.

План второго порядка, содержащий в своем составе план первого порядка, называют композиционным. Свойство композиционного плана позволяет планировать и проводить эксперимент поэтапно. На первом этапе ставится план (эксперимент) первого порядка (ПФП), по результатам которого получается линейная модель или модель, содержащая, кроме линейных членов, взаимодействия факторов. Если такая модель окажется неадекватной, дополнительно ставятся опыты в звездных точках. Вся совокупность этих опытов составит B-план второго порядка. Обработка результатов такого плана позволяет получать квадратичную модель.

Расчет коэффициентов регрессии B-плана ведется по следующим формулам:

$$b_0 = T_1(0y) - T_2\sum_{i=1}^{k}(iiy);$$
$$b_i = T_3(iy); \tag{13}$$
$$b_{ii} = T_4(iiy) + T_5\sum_{i=1}^{k}(iiy) - T_2(0y);$$
$$b_{iu} = T_6(iuy),$$

где b_0 — свободный член; b_i — линейные коэффициенты регрессии, i = 1, 2, …, k; b_{ii} — квадратичные коэффициенты регрессии, i = 1, 2, …, k; b_{iu} — коэффициент при парных взаимодействиях, $i \neq u$; T_i — коэффициенты, значения которых указаны в табл. 6.

$$(0y) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} y_j;$$
$$(iiy) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j; \tag{14}$$
$$(iy) = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j;$$
$$(iuy) = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{uj} y_j, \quad i \neq u$$

Таблица 6

Значения коэффициентов $T_1 – T_6$

T_i	Вид плана			
	B_2 (k = 2, N = 8)	B_3 (k = 3, N = 14)	B_4 (k = 4, N = 24)	B_5 с ПФП в ортогональной части (k = 5, N = 42)
T_1	1,25	0,40624	0,22917	0,15821
T_2	0,75	0,15624	0,0625	0,0332
T_3	0,16667	0,1	0,05556	0,02941
T_4	0,5	0,5	0,5	0,5
T_5	0,25	–0,09375	–0,10417	–0,0918
T_6	0,25	0,125	0,0625	0,03125

7. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ

Дисперсия воспроизводимости

После того как уравнение регрессии получено, приступают к его статистическому анализу. При этом решают две основные задачи: оценивают значимость коэффициентов регрессии и проверяют адекватность математической модели.

Для выполнения каждой из этих процедур необходимо иметь количественную оценку ошибок эксперимента в целом. Соответствующей характеристикой является дисперсия воспроизводимости, обозначаемая $s^2\{y\}$. Рассмотрим способы ее вычисления в зависимости от методики дублирования опытов.

1. Равномерное дублирование. Каждый из N запланированных опытов повторяется одинаковое число n раз, т.е. имеется N серий, в каждой из которых становится n дублированных опытов.

По результатам опытов первой серии рассчитываем дисперсию первого опыта

$$s_1^2 = [(y_{11} - \bar{y}_1)^2 + (y_{12} - \bar{y}_1)^2 + \cdots + (y_{1n} - \bar{y}_1)^2]/(n-1) = \sum(y_{1u} - \bar{y}_1)^2/\,(n-1), \quad (16)$$

где $\bar{y}_1$ — среднее по серии дублированных опытов, равное

$$\bar{y}_j = \sum y_{ju}\,/n. \quad (17)$$

Аналогично рассчитываются средние и дисперсии всех остальных опытов:

$$s_j^2 = \sum(y_{1u} - \bar{y}_j)^2/\,(n-1), \quad (18)$$

$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

Числа степеней свободы всех дисперсий одинаковы и равны $n – 1$:

$$f_j = f = n - 1.$$

В качестве дисперсии воспроизводимости $s^2\{y\}$ берется среднее арифметическое дисперсий опытов

$$s^2\{y\} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_N^2}{N} = \sum s_j^2\,/\,N. \quad (19)$$

Число степеней свободы f_y этой дисперсии равно сумме чисел степеней свободы дисперсий опытов

$$f_y = \sum f_j = N(n-1). \quad (20)$$

Необходимыми предпосылками статистического анализа являются нормальность распределения выходной величины и однородность дисперсий опытов.

Проверка однородности дисперсий опытов при равномерном дублировании проводится по критерию Кохрена, равному отношению максимального значения дисперсии к сумме всех дисперсий во всех опытах.

$$G = \frac{s_{max}^2}{\sum_j^N s_i^2} \qquad (21)$$

2. Отсутствие дублированных опытов (опыты в нулевых точках). Для оценки дисперсии воспроизводимости в этом случае приходится ставить отдельную серию дублированных опытов, если это возможно.

Как и в предыдущем случае, дисперсия опытов этой серии служит оценкой дисперсии воспроизводимости с числом степеней свободы, равным $f_y = n_0 - 1$, где n_0 — число дублированных опытов в отдельной серии.

Оценка точности, значимости коэффициентов регрессии и интерпретация результатов

Статистическую обработку проводят обычно для модели, записанной в нормализованных обозначениях факторов. Для определенности будем иметь в виду линейную модель, содержащую k факторов.

После того как уравнение регрессии получено и рассчитана дисперсия воспроизводимости, следует оценить точность, с которой найдены коэффициенты регрессии.

Коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга, и отпадает необходимость в пересчете их величин после отбрасывания членов в уравнении регрессии.

Поскольку они вычислены по результатам эксперимента, а эти результаты являются случайными величинами, то случайными величинами будут и коэффициенты регрессии b_i.

Поэтому в качестве показателя точности определения коэффициента b_i удобно взять его дисперсию $s\{b_i\}$.

Дисперсии всех коэффициентов регрессии равны между собой и определяются по формулам:

Дисперсии коэффициентов регрессии между ними определяются по формулам:

$$s^2\{b_0\} = (T_1/n)s^2\{y\};$$
$$s^2\{b_i\} = (T_3/n)s^2\{y\};$$
$$s^2\{b_{ii}\} = [(T_4 + T_5)/n]s^2\{y\}; \qquad (22)$$
$$s^2\{b_{ij}\} = (T_6/n)s^2\{y\}.$$

Два случая применимости этих формул:

1. Отсутствие дублированных опытов (не считая опытов в центре плана). В этом случае: N — число запланированных опытов. Для плана B_k с ПФП в ортогональной части и с n_0 опытами в центре плана $N=2^k+2k+n_0$; y_i — результат j-го опыта, $j = 1, 2, \ldots, N$. Величина n в формулах (22), представляющая собой число дублированных опытов в каждой серии, принимается равной 1.

2. Равномерное дублирование. Формулы (13), (14) по-прежнему справедливы, но под y_i понимается среднее арифметическое по результатам j-й серии дублированных опытов; n — число дублированных опытов.

Значения коэффициентов $T_1 - T_6$ для B-планов с ПФП в ортогональной части и число факторов $k = 2 - 5$ при отсутствии опытов в центре плана приведены в табл. 6.

После того как найдены дисперсии коэффициентов регрессии, следует выявить незначимые коэффициенты, т.е., которые в математической модели можно приравнять нулю.

Для этого используется t-критерий Стьюдента. Для каждого коэффициента регрессии b_i отыскивается t-отношение

$$t_i = |b_i| \,/\, s\{b_i\}, \qquad (23)$$

вычисленную величину t_i сравнивают с табличным значением $t_{табл.}$ t-критерия Стьюдента для заданного уровня значимости q и числа степеней свободы f_y, с которым определялась дисперсия воспроизводимости $s\{y\}$.

Если $t_i < t_{табл.}$, то коэффициент регрессии b_i незначим и соответствующий член в уравнении регрессии должен быть отброшен.

С учетом (23) условие того, что коэффициент регрессии незначим, можно записать в более удобном виде:

$$|b_i| \le t_{табл.}\, s\{b_i\}. \tag{24}$$

При отбрасывании незначимых членов возникает определенное неудобство, связанное со статической зависимостью коэффициентов регрессии. Эта зависимость появляется в том, что, после того как незначимые коэффициенты регрессии приравняли нулю, оценки остальных коэффициентов регрессии изменяются.

Практический вывод: после отбрасывания незначимых коэффициентов регрессии желательно снова воспользоваться МНК для уточнения оставшихся значимых коэффициентов регрессии.

С помощью t-критерия можно найти и доверительный интервал для произвольного коэффициента регрессии b_i. Обозначим истинную величину этого коэффициента через β_i. Тогда

$$b_i - t_{табл.}s\{b_i\} \le \beta_i \le b_i + t_{табл.}s\{b_i\}. \tag{25}$$

Даже простейшая линейная модель позволяет получить важную информацию об объекте исследования.

Запишем ее в нормализованных обозначениях факторов

$$y = b_0 + b_1x_1+b_2x_2 + \ldots + b_kx_k\,. \tag{26}$$

Коэффициенты этой модели имеют четкий физический смысл:

✓ Коэффициент b_0 равен значению выходной величины, рассчитанному по уравнению регрессии, если все факторы зафиксированы на основном уровне, т.е. в середине диапазона варьирования.

✓ Знак коэффициента b_i свидетельствует о характере влияния соответствующего фактора.

- Если $b_i > 0$, то с ростом значений факторов X_i выходная величина растет.
- Если $b_i < 0$, то с ростом X_i отклик уменьшается.

✓ Величина b_i равна приросту выходной величины, полученному при увеличении значения фактора X_i на половину диапазона его варьирования, например, — с основного уровня ($X_i = X^0{}_i$) до верхнего уровня ($X_i = X^1{}_i$).

✓ Графиком зависимости величины y от любого фактора будет прямая.

✓ Рассмотрение зависимостей выходной величины от этого фактора при разных фиксированных значениях других факторов позволит получить семейство прямых, причем все эти прямые будут параллельны. Это связано с тем, что представление регрессионной модели в линейном виде предполагает отсутствие взаимодействий факторов.

✓ Чем больше абсолютная величина линейного коэффициента регрессии в модели (26), тем сильнее влияние соответствующего фактора. Если, например, оказалось, что $|b_3|>|b_1|$, то можно сделать вывод о том, что изменение фактора X_3 в пределах его диапазона варьирования оказывает большее влияние на изменение отклика, чем варьирование фактора X_1 в его диапазоне.

Таким образом, с помощью линейной регрессионной модели можно сравнить степень влияния факторов на выходную величину и выявить важнейшие факторы.

Если уравнение регрессии отличается от линейного, то степень влияния фактора может изменяться от начала к концу диапазона варьирования и зависит от уровней варьирования других факторов.

Проверка адекватности регрессионной модели

Регрессионная модель, построенная по результатам эксперимента, позволяет рассчитать значения отклика в разных точках области варьирования факторов.

Для этого в уравнение регрессии подставляют соответствующие значения варьируемых факторов.

Проверка адекватности математической модели дает возможность экспериментатору ответить на вопрос, будет ли построенная модель предсказывать значения выходной величины с той же точностью, что и результаты эксперимента.

Пусть N — число опытов экспериментального плана или число серий параллельных опытов, если опыты дублируются; p — число оцениваемых коэффициентов регрессии математической модели.

Проверка адекватности возможна только при $N > p$, т.е. если план эксперимента является насыщенным.

Для проверки адекватности модели необходимо знать оценку дисперсии воспроизводимости $s^2\{y\}$, которую можно вычислить в зависимости от методики дублирования по формуле (19).

Порядок проверки адекватности модели.

1. Определяют сумму квадратов, характеризующую адекватность модели $S_{\text{ад}}$. При равномерном дублировании $S_{\text{ад}}$ рассчитывают по формуле

$$S_{\text{ад}} = n[(\bar{y}_1 - \hat{y}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \hat{y}_2)^2 + \cdots + (\bar{y}_N - \hat{y}_N)^2\ ] = n\sum(\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2. \quad (27)$$

Здесь n — число дублированных опытов в каждой серии; $\bar{y}_j$ — среднее значение результатов эксперимента в j-й серии дублированных опытов, j = 1, 2, …, N; $\hat{y}_j$ — среднее значение по уравнению регрессии для j-го основного опыта.

В случае неравномерного дублирования

$$S_{\text{ад}} = \sum n_j(\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2, \quad (28)$$

где n — число дублированных опытов в j-й серии.

2. Вычисляют число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ дисперсии адекватности. При любой методике дублирования опытов оно равно

$$f_{\text{ад}} = N - p. \quad (29)$$

3. Вычисляют дисперсию адекватности $s^2_{\text{ад}}$

$$s^2_{\text{ад}} = s_{\text{ад}}/f_{\text{ад}}. \quad (30)$$

4. С помощью F-критерия Фишера проверяют однородность дисперсии адекватности $s^2_{\text{ад}}$ и дисперсии воспроизводимости $s^2\{y\}$.

При этом вычисляют

$$F_{\text{расч}} = s^2_{\text{ад}}/s^2\,\{y\}, \quad (31)$$

которое сравнивают с табличным значением F-критерия $F_{\text{табл}}$, найденным при выбранном уровне значимости q для чисел степеней свободы $f_1 = N - p$ в числителе и $f_2 = N - 1$ в знаменателе (см. приложение, табл. 1).

Если $F_{\text{расч.}} < F_{\text{табл}}$, то модель считается адекватной и может быть использована для описания объекта. В противном случае модель неадекватна.

Если оказалось, что уравнение не адекватно, следовательно, при проведении опытов были допущены грубые ошибки или выбранный полином недостаточно полно отражает исследуемую зависимость. В этих случаях необходимо повторить опыты либо изменить интервалы варьирования, либо применить другой план.

Рассмотренный метод проверки адекватности модели имеет простой физический смысл. В основе этой процедуры лежит проверка гипотезы об однородности дисперсии адекватности и дисперсии, характеризующей ошибку эксперимента.

Дисперсия адекватности характеризует расхождение между результатами эксперимента y_j и значениями выходной величины $\hat{y}_j$, вычисленными по уравнению регрессии. Модель удовлетворительно описывает объект исследования, т.е. является адекватной, если указанное расхождение связано только с экспериментальными ошибками, а не связано, например, с неудачным выбором вида математической модели. Поверка гипотезы об однородности рассматриваемых дисперсий и выясняет «общность происхождения» экспериментальных ошибок и расхождения между y_j и $\hat{y}_j$.

Неадекватность модели может быть связана с присутствием выбросов — опытов, значения отклика в которых, плохо описываются моделью. Удаление выбросов может существенно понизить остаточную сумму квадратов и сделать модель адекватной. Если же дисперсия воспроизводимости определена корректно и неадекватность не связана с выбросами, то полученная модель неудовлетворительно описывает имеющиеся данные. Обычно это связано с неудачным выбором вида модели. Следовательно, надо изменить (как правило, усложнить) вид модели. Простейшее изменение вида модели — увеличение степени полинома (полином второй степени вместо линейной модели; полином третьей степени вместо полинома второй степени).

Кроме поверки адекватности модели можно оценить ее эффективность, информационную ценность [1].

8. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. Выбор варьируемых и стабилизируемых факторов, а также выходных величин эксперимента.
2. Выбор регрессионной модели.
3. Определение диапазона варьирования факторов.
4. Выбор плана эксперимента.
5. Составление методики проведения эксперимента.
6. Постановка разведывательных опытов. Проверка нормальности распределения выходной величины. Определение числа дублированных опытов.
7. Проведение основного эксперимента.
8. Отбрасывание грубых наблюдений. Проверка однородности дисперсий опытов. Расчет дисперсии воспроизводимости (при отсутствии дублированных опытов дисперсия воспроизводимости определяется по результатам отдельной серии опытов).
9. Расчет коэффициентов регрессии математической модели.
10. Оценка значимости коэффициентов регрессии. Проверка адекватности и эффективности регрессионной модели.
11. Интерпретация результатов.

Применение *B*-плана второго порядка

Для реализации задачи по определению прочностной зависимости СУБ от состава было проведено исследование на основе трехфакторного эксперимента.

Для осуществления эксперимента был принят композиционный план на кубе типа B_3. Планами второго порядка позволяют получить математическое описание объектов в виде полинома второго порядка, общий вид модели второго порядка имеет вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} b_{ij} x_i x_j$$

В качестве факторов варьирования были приняты: количество портландцемента (Ц) — в кг/м^3, количество микронаполнителя (М) — в кг/м^3, количество добавки гиперпластификатора (Д) — в кг/м^3. Уровни варьирования факторов подобраны исходя из априорных научных источников и приведены в табл. 7.

Таблица 7

Факторы варьирования

Фактор			Уровни варьирования фактора			Интервал варьирования
Наименование	Обозначение					
	натуральное	нормализованное (кодированное)	+1	0	–1	
Количество портландцемента, Ц	X_1	x_1	550	500	450	50
Количество наполнителя, М	X_2	x_2	90	80	70	10
Количество гиперпластификатора, Д	X_3	x_3	8	7	6	1

Технологические параметры вышеперечисленных факторов оставались неизменными: тип цемента — ЦЕМI 42,5 Н ГОСТ 31108-2003, микронаполнитель — микрокремнезём МКУ-85 (постоянного химического состава), гиперпластификатор на основе карбоксилата — Sika ViscoCrete 3180.

В качестве постоянных (зафиксированных) инертных составляющих для всех составов СУБ использовались:

Мелкий кварцевый песок с модулем крупности Мк = 1,8, стабильного химического и зернового состава; с содержанием пылевидных и глинистых частиц — 0,8 % по массе ГОСТ 8736-93. Количество в бетонной смеси 800 кг/м^3.

Щебень гранитный смеси фракций 3–15 мм; с содержанием зёрен пластинчатой и игловатой формы — 14 % по массе (2 группа); содержание пылевидных и глинистых частиц — 0,6 % по массе; маркой по дробимости — М1200; маркой по морозостойкости — F300 по ГОСТ 8267-93. Количество в бетонной смеси 900 кг/м^3.

Вода по ГОСТ 23732-2011. Количество в бетонной смеси — 150 л.

Все сырьевые материалы, применяемые для приготовления самоуплотняющейся бетонной смеси, соответствовали ГОСТ 30108-94 по удельной эффективной активности естественных радионуклидов.

Количество экспериментальных составов (число опытов) — N = 14 (табл. 5), количество образцов-кубов (повторных опытов) n = 3.

Перемешивание компонентов самоуплотняющейся бетонной смеси осуществлялось в лабораторном бетоносмесителе принудительного действия — ЛС-ЦБ-10. Время перемешивания всех составов оставалось одинаковым — 90 сек

Из каждого состава было залито (без уплотнения и вибрации) по три образца-куба 100×100×100 мм в соответствии с требованиями ГОСТ 10181, ГОСТ 18105 и ГОСТ 7473 в предварительно очищенные и смазанные формы, отвечающие ГОСТ 22685. Укладка производилась сразу после выгрузки из смесителя. Образцы каждого из составов до распалубливания хранились в помещении лаборатории при температуре + 18°С и были покрыты влажной тканью (для избежания испарения влаги). Распалубка образцов всех составов осуществлялась через 24,5 ч.

После распалубливания образцы были помещены в камеру с нормальными условиями твердения: с температурой (20±2) °С и относительной влажностью воздуха (95±5) %. Образцы были уложены на подкладки так, чтобы расстояние между образцами, а также между образцами и стенками камеры было не менее 5 мм, по ГОСТ 10180-2012.

Испытания проводились на 28 сутки нормального твердения согласно ГОСТ 10180—2012. Отклонения по плотности, линейным размерам и массе образцов-кубов всех составов не превышали допуски ГОСТа. Разрушение осуществлялось на гидравлическом лабораторном прессе ИП-1000 (аттестованном и поверенном в соответствии с графиком поверки оборудования). Результаты прочности на сжатия учитывали рабочее сечение и были приведены к базовому размеру образца, помещены в табл. 8.

Таблица 8

Матрица планирования и результаты эксперимента

№ опыта	Ц	М	Д	Кодированное значение фактора			Результаты дублированных опытов, y_{ju}, МПа			Среднеарифметическое значение прочности 28 сут., $\bar{y}$, МПа
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	450	70	6	–1	–1	–1	52,3	59,9	54,3	55,5
2	550	70	6	1	–1	–1	44,2	39,7	42,4	42,1
3	450	90	6	–1	1	–1	53,3	58,1	57,2	56,2
4	550	90	6	1	1	–1	39,8	42,6	41,8	41,4
5	450	70	8	–1	–1	1	39,9	44,1	43,5	42,5
6	550	70	8	1	–1	1	32,1	33,4	36,2	33,9
7	450	90	8	–1	1	1	51,1	52,3	53,2	52,2
8	550	90	8	1	1	1	51,4	52,3	56,5	53,4
9	450	80	7	–1	0	0	50,7	48,3	51,3	50,1
10	550	80	7	1	0	0	45,7	46,2	44,6	45,5
11	500	70	7	0	–1	0	45,2	46,1	40,1	43,8
12	500	90	7	0	1	0	49,1	48,2	45,5	47,6
13	500	80	6	0	0	–1	52,3	49,6	55,9	52,6
14	500	80	8	0	0	1	53,6	52,8	48,4	51,6

В 11 столбце табл. 8 приведены значения прочности СУБ в возрасте 28 суток, усредненные по трем дублированным опытам каждой серии:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{u=1}^{3} y_{ju}}{3}.$$

Построение регрессионной модели

Для построения адекватной математической модели по полученным данным необходимо:

1. Проверить однозначность параметров оптимизации. Параметр оптимизации является однозначным, если во всех опытах наблюдается случайная ошибка приблизительно одинаковой величины. Для этого необходимо вычислить дисперсию параметра оптимизации в каждом опыте по формуле (18).

Расчет дисперсии для опыта №1:

$$s_j^2 = \frac{\sum(y_{1u} - \bar{y}_j)^2}{(n-1)} = \frac{(52{,}3 - 55{,}5)^2 + (59{,}9 - 55{,}5)^2 + (54{,}3 - 55{,}5)^2}{3-1} = 15{,}52 \text{ МПа}^2.$$

Дисперсии остальных опытов рассчитываются аналогично. Результаты расчета дисперсии для всех опытов приведены в табл. 9.

В табл. 9 указаны расчетные параметры дисперсии.

Однородность дисперсий проверяется по G-критерию Кохрена по формуле (21) [5].

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_j^N s_i^2} = \frac{15{,}52}{82{,}31} = 0{,}19.$$

Расчетное значение G-критерия сравниваем с табличным (приложение, табл. 2) при степенях свободы $f_1 = n - 1 = 3 - 1 = 2$ и $f_2 = N(n - 1) = 14(3 - 1) = 28$: $G_{\text{табл.}} = 0{,}214$ (табличное значение определялось методом интерполяции). Если $G < G_{\text{табл.}} = 0{,}19 < 0{,}214$, то ошибка определения прочности бетона во всех опытах однородна и параметр оптимизации однозначно отражает состояние объекта исследования при переборе уровней факторов в опытах.

2. Рассчитать коэффициенты уравнения регрессии.

Расчет коэффициентов регрессии B-плана ведется по формулам (13) и (14).

Таблица 9

Расчетные параметры дисперсии

Номер опыта	Результаты дублированных опытов, y_{ju}			Среднеарифметическое значение прочности 28 сут., $\bar{y}$	$(y_1-\bar{y})^2$	$(y_2-\bar{y})^2$	$(y_3-\bar{y})^2$	Дисперсия опыта, s^2
	y_1	y_2	y_3					
1	52,3	59,9	54,3	55,50	10,24	19,36	1,44	15,52
2	44,2	39,7	42,4	42,10	4,41	5,76	0,09	5,13
3	53,3	58,1	57,2	56,20	8,41	3,61	1,00	6,51
4	39,8	42,6	41,8	41,40	2,56	1,44	0,16	2,08
5	39,9	44,1	43,5	42,50	6,76	2,56	1,00	5,16
6	32,1	33,4	36,2	33,90	3,24	0,25	5,29	4,39
7	51,1	52,3	53,2	52,20	1,21	0,01	1,00	1,11
8	51,4	52,3	56,5	53,40	4,00	1,21	9,61	7,41
9	50,7	48,3	51,3	50,10	0,36	3,24	1,44	2,52
10	45,7	46,2	44,6	45,50	0,04	0,49	0,81	0,67
11	45,2	46,1	40,1	43,80	1,96	5,29	13,69	10,47
12	49,1	48,2	45,5	47,60	2,25	0,36	4,41	3,51
13	52,3	49,6	55,9	52,60	0,09	9,00	10,89	9,99
14	53,6	52,8	48,4	51,60	4,00	1,44	10,24	7,84
			$\sum$	**668,40**	**49,53**	**54,02**	**61,07**	**82,31**

Таблица 10

Расчетные параметры для определения коэффициентов уравнения регрессии

Точки плана	Факторы			Среднеарифметическое значение прочности 28 сут., $\bar{y}$	Расчетные параметры для определения коэффициентов при:									
					линейных членах			квадратичных членах			взаимодействиях			
	x_1	x_2	x_3		$x_1\bar{y}$	$x_2\bar{y}$	$x_3\bar{y}$	$(x_1)^2\bar{y}$	$(x_2)^2\bar{y}$	$(x_3)^2\bar{y}$	$x_1x_2\bar{y}$	$x_1x_3\bar{y}$	$x_2x_3\bar{y}$	$x_1x_2x_3\bar{y}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	–1	–1	–1	55,5	–55,5	–55,5	–55,5	55,5	55,5	55,5	55,5	55,5	55,5	–55,5
2	1	–1	–1	42,1	42,1	–42,1	–42,1	42,1	42,1	42,1	–42,1	–42,1	42,1	42,1
3	–1	1	–1	56,2	–56,2	56,2	–56,2	56,2	56,2	56,2	–56,2	56,2	–56,2	56,2
4	1	1	–1	41,4	41,4	41,4	–41,4	41,4	41,4	41,4	41,4	–41,4	–41,4	–41,4
5	–1	–1	1	42,5	–42,5	–42,5	42,5	42,5	42,5	42,5	42,5	–42,5	–42,5	42,5
6	1	–1	1	33,9	33,9	–33,9	33,9	33,9	33,9	33,9	–33,9	33,9	–33,9	–33,9
7	–1	1	1	52,2	–52,2	52,2	52,2	52,2	52,2	52,2	–52,2	–52,2	52,2	–52,2
8	1	1	1	53,4	53,4	53,4	53,4	53,4	53,4	53,4	53,4	53,4	53,4	53,4
9	–1	0	0	50,1	–50,1	0,00	0,00	50,1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	1	0	0	45,5	45,5	0,00	0,00	45,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11	0	–1	0	43,8	0,00	–43,8	0,00	0,00	43,8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	0	1	0	47,6	0,00	47,6	0,00	0,00	47,6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	0	0	–1	52,6	0,00	0,00	–52,6	0,00	0,00	52,6	0,00	0,00	0,00	0,00
14	0	0	1	51,6	0,00	0,00	51,6	0,00	0,00	51,6	0,00	0,00	0,00	0,00
$\sum$				**668,4**	**–40,2**	**33**	**–14,2**	**472,8**	**468,6**	**481,4**	**8,4**	**20,8**	**29,2**	**11,2**

$$(0y) = \sum_{j=1}^{14} \bar{y}_j = 668{,}4;$$

$$(11y) = \sum_{j=1}^{14} x_{1j}^2 \bar{y}_j = 472,8;$$

$$(22y) = \sum_{j=1}^{14} x_{2j}^2 \bar{y}_j = 468{,}6\,;$$

$$(33y) = \sum_{j=1}^{14} x_{3j}^2 \bar{y}_j = 481{,}4\,;$$

$$(1y) = \sum_{j=1}^{14} x_{1j} \bar{y}_j = -40{,}2;$$

$$(2y) = \sum_{j=1}^{14} x_{2j} \bar{y}_j = 33;$$

$$(3y) = \sum_{j=1}^{14} x_{3j} \bar{y}_j = -14{,}2;$$

$$(12y) = \sum_{j=1}^{14} x_{1j} x_{2i} \bar{y}_j = 8{,}4;$$

$$(13y) = \sum_{j=1}^{14} x_{1j} x_{3i} \bar{y}_j = 20{,}8;$$

$$(23y) = \sum_{j=1}^{14} x_{2j} x_{3i} \bar{y}_j = 29{,}2;$$

$$(123y) = \sum_{j=1}^{14} x_{1j} x_{2j} x_{3j} \bar{y}_j;$$

$$b_0 = T_1(0y) - T_2 \sum_{i=1}^{3} (iiy) = 0{,}40624 \cdot 668{,}4 - 0{,}15624 \cdot (472{,}8 + 468{,}6 + 481{,}4) = 49{,}3;$$

$$b_1 = T_3(1y) = 0{,}1 \cdot (-40{,}2) = -4{,}02;$$

$$b_2 = T_3(2y) = 0{,}1 \cdot (33) = -3{,}3;$$

$$b_3 = T_3(3y) = 0{,}1 \cdot (-14{,}2) = -1{,}42;$$

$$b_{11}=T_4(11y)+\ T_5\sum_{i=1}^{3}(iiy)-T_2(0y)=0{,}5\cdot 472{,}8+(-0{,}09375)\cdot(472{,}8+468{,}6+481{,}4)-0{,}15624\cdot 668{,}4=-1{,}42;$$

$$b_{22}=T_4(22y)+\ T_5\sum_{i=1}^{3}(iiy)-T_2(0y)=0{,}5\cdot 468{,}6+(-0{,}09375)\cdot(472{,}8+468{,}6+481{,}4)-0{,}15624\cdot 668{,}4=3{,}5;$$

$$b_{33}=T_4(33y)+\ T_5\sum_{i=1}^{3}(iiy)-T_2(0y)=0{,}5\cdot 481{,}4+(-0{,}09375)\cdot(472{,}8+468{,}6+481{,}4)-0{,}15624\cdot 668{,}4=2{,}88;$$

$$b_{12}=T_6(12y)=0{,}125\cdot 8{,}4=1{,}05;$$

$$b_{13}=T_6(13y)=0{,}125\cdot 20{,}8=2{,}6;$$

$$b_{23}=T_6(12y)=0{,}125\cdot 29{,}2=3{,}65;$$

$$b_{123}=T_6(123y)=0{,}125\cdot 11{,}2=1{,}4.$$

Получили следующее уравнение регрессии:

$$y=49{,}3-4{,}02x_1+3{,}3x_2-1{,}42x_3-1{,}42(x_1)^2-3{,}5(x_2)^2+2{,}9(x_3)^2+1{,}05x_1x_2+2{,}6x_1x_3+3{,}65x_2x_3+1{,}4x_1x_2x_3.$$

Поскольку коэффициенты вычислены по результатам эксперимента, а эти результаты являются случайными величинами, то случайными величинами будут и коэффициенты регрессии. В качестве показателя точности определения коэффициента b_i используют его дисперсию $s\{b_i\}$.

Дисперсии всех коэффициентов регрессии равны между собой и для планов второго порядка определяются по формулам (15):

$$s^2\{b_0\}=(T_1/n)s^2\{y\}=\frac{0{,}40624}{3}\cdot 5{,}88=0{,}796;$$

$$s^2\{b_i\}=(T_3/n)s^2\{y\}=\frac{0{,}1\cdot 5{,}88}{3}=0{,}196;$$

$$s^2\{b_{ii}\}=[(T_4+T_5)/n]s^2\{y\}=\frac{0{,}5-0{,}09375}{3}\cdot 5{,}88=0{,}796;$$

$$s^2\{b_{ij}\}=(T_6/n)s^2\{y\}=\frac{0{,}125}{3}\cdot 5{,}88=0{,}245;$$

где $s^2\{y\}$ — оценка дисперсии воспроизводимости; n — число дублированных опытов.

$$s^2\{y\}=\frac{s_1^2+s_2^2+\cdots+s_{14}^2}{14}=\sum s_j^2/N=\frac{82{,}31}{14}=5{,}88.$$

Определяем доверительный интервал для коэффициентов [1]:

$$\Delta b_i=t\cdot s\{b_i\},$$

где t — критерий Стьюдента (приложение, табл. 3) для числа степеней свободы

$$f_y=N(n-1)=28 \text{ и } q=0{,}05\text{: } t_{\text{табл.}}=2{,}05.$$

Если модуль $|b_i|>\Delta b_i$, то коэффициент отличен от нуля, то есть значим, и данный фактор в выбранном интервале варьирования или взаимодействие факторов действительно оказывают влияние на параметр оптимизации. Расчет дисперсий коэффициентов регрессии представлен в табл. 11.

Таблица 11

Расчет дисперсии коэффициентов регрессии

$s^2\{b_0\}$ =	0,796	$s\{b_0\}$ =	0,892263	Δb_0 =	1,82914
$s^2\{b_i\}$ =	0,1956	$s\{b_i\}$ =	0,442692	Δb_i =	0,90752
$s^2\{b_{ii}\}$ =	0,7961	$s\{b_{ii}\}$ =	0,892274	Δb_{ii} =	1,82916
$s^2\{b_{ij}\}$ =	0,245	$s\{b_{ij}\}$ =	0,494945	Δb_{ij} =	1,01464

В полученной модели незначимыми являются квадратичный коэффициент $(x_1)^2$ и парное взаимодействие x_1x_2, исключаем их из модели и получаем уточненное уравнение функции отклика:

$$y = 49{,}3 - 4{,}02x_1 + 3{,}3x_2 - 1{,}42x_3 - 3{,}5(x_2)^2 + 2{,}9(x_3)^2 + 2{,}6x_1x_3 + 3{,}65x_2x_3 + 1{,}4x_1x_2x_3.$$

3. Проверяем адекватность полученной модели.

- По полученному уравнению регрессии вычисляем расчетные значения параметра оптимизации $\hat{y}$ для каждого опыта по уточненной модели:

Для опыта №1

$$\hat{y}_1 = 49{,}3 + 4{,}02 - 3{,}3 + 1{,}42 - 3{,}5 + 2{,}9 + 2{,}6 + 3{,}65 - 1{,}4 = 55{,}7 \text{ МПа}.$$

Для опыта №2

$$\hat{y}_2 = 49{,}3 - 4{,}02 - 3{,}3 + 1{,}42 - 3{,}5 + 2{,}9 - 2{,}6 + 3{,}65 + 1{,}4 = 45{,}3$$

и так далее. Результаты расчета $\hat{y}_j$, а также квадратов отклонений расчетного значения прочности от фактического $(\bar{y} - \hat{y})^2$ для всех опытов приведены в табл. 12.

Таблица 12

Статистические показатели функции отклика

№ опыта	Среднее значение прочности в опыте, $\bar{y}_j$, МПа	Дисперсия параллельных определений y_j, s_j^2 МПа	Расчетное значение прочности бетона, $\hat{y}_j$	$(\bar{y} - \hat{y})^2$
1	55,5	15,52	55,7	0,036
2	42,1	5,13	45,3	9,923
3	56,2	6,51	57,8	2,528
4	41,4	2,08	41,8	0,123
5	42,5	5,16	43,2	0,423
6	33,9	4,39	37,5	13,032
7	52,2	1,11	54,3	4,203
8	53,4	7,41	54,2	0,656
9	50,1	2,52	53,3	10,368
10	45,5	0,67	45,9	0,048
11	43,8	10,47	42,5	1,69
12	47,6	3,51	49,1	2,25
13	52,6	9,99	53,6	1,04
14	51,6	7,84	50,8	0,67
	∑	**82,31**	**685,0**	**46,99**

- Вычисляем дисперсию адекватности модели:

$$s^2_{\text{ад}} = \frac{\sum_j^{14}(\bar{y}-\hat{y})^2}{N-p} = \frac{46{,}99}{14-9} = 9{,}4,$$

где p — количество значимых коэффициентов в уравнении регрессии (включая b_0).

- Вычисляем критерий Фишера (F) [6]:

$$F_{\text{расч}} = \frac{S^2_{\text{ад}}}{s^2\{y\}} = \frac{9{,}4}{5{,}88} = 1{,}62.$$

- Расчетное значение F — отношение сравнено с табличным отношением $F_{табл.}$ для уровня значимости q и чисел степеней свободы f_1 (числитель) и f_2 (знаменатель).

$$f_1 = N - p = 14 - 9 = 5, \quad f_2 = N - 1 = 14 - 1 = 13,$$

где N — число опытов; p — число значимых коэффициентов регрессии.

Для $q = 0{,}05$ $F_{табл.} = 3{,}3$. Полученное соотношение $F_{расч.} < F_{табл.}$ позволяет принять гипотезу об адекватности регрессионной модели. Полученное уравнение адекватно описывает влияние выбранных факторов на прочность бетона.

Конечным результатом обработки данных эксперимента явилось получение уравнений регрессий по количеству определяемых характеристик со значимыми коэффициентами при выбранных переменных.

Анализ и интерпретация уравнения регрессии

Если уравнение регрессии отличается от линейного, то простое сравнение по абсолютной величине линейных коэффициентов регрессии не определяет относительную степень влияния факторов, так как присутствуют квадратичные члены и парные взаимодействия. Методика анализа и интерпретация уравнения регрессии приведены в [1].

В общем случае, для i-го фактора критерием максимальной степени влияния в диапазоне варьирования является максимальное по модулю значение величины, которое равно

$$|d_{i\,max}| = |b_i| + 2|b_{ii}| + \sum_{j \neq i} |b_{ij}|. \tag{32}$$

Рассматривая уравнение параболы общего вида

$$y = b_0 + b_1 x_i + b_{ii} x_i^2,$$

вспомним:

- Если $b_{ii} > 0$, то уравнение параболы описывает вогнутую функцию (ветви параболы направлены вверх), а если $b_{ii} < 0$ — выпуклую.
- Абсцисса вершины параболы равна $x_{iв} = -b_i/2b_{ii}$. Отсюда вытекают остальные свойства.
- Если имеет место соотношение

$$|\mathrm{b_i}| > 2|\mathrm{b_{ii}}|, \tag{33}$$

то вершина параболы находится вне диапазона варьирования фактора x_i и, следовательно, уравнение описывает монотонную функцию. Если при этом $b_i > 0$, то функция монотонно возрастает, а при $b_i < 0$ — монотонно убывает.

- При наличии соотношения (33) функция имеет экстремум внутри диапазона варьирования фактора x_i — максимум при $b_{ii} < 0$ или минимум при $b_{ii} > 0$.

Проведем анализ уравнения регрессии, полученного в результате проведенного эксперимента.

Зависимость y от фактора x_3 является линейной, так как квадратичный член отсутствует. Можно утверждать, что с увеличением содержания гиперпластификатора, соответствующего нормализованному значению фактора x_3, отклик увеличивается при любых значениях остальных факторов. Это подтверждают соотношения:

$$b_3 > 0.$$

Зависимости отклика от факторов x_1 и x_2 описываются уравнениями парабол, т.к. b_{11} и b_{22} отличны от нуля.

Рассмотрим графическую зависимость y от x_1 при различных значениях x_2 и фиксированном уровне фактора $x_3 = 1$. При таком значении фактора x_3 достигается максимум прочности. При этом проявится эффект парного взаимодействия b_{12} *и* b_{13}.

Подставив значения $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ в уравнение регрессии, получим

$$y = 52{,}57 + 5{,}42x_1 + 2{,}85 + 1{,}75 - 4{,}74(x_1)^2 - 1{,}37 + 0{,}63x_1 + 0{,}74x_1 = 55{,}8 + 6{,}79x_1 - 4{,}74(x_1)^2.$$

Рассмотрим поведение параболы в диапазоне $-1 \leq x_1 \leq +1$. Данная парабола выпуклая и имеет максимум внутри диапазона варьирования, так как выполняются условия: $b_{ii} < 0$ (–4,74) и (33).

Максимум находится в точке $x_{1в} = -6{,}79/2(-4{,}74) = 0{,}72$. Подставив найденное значение $x_1 = x_{1в}$ в уравнение, найдем величину максимума $y_в = 58{,}23$ (рис. 2, кривая 1).

Оставим значение $x_3 = 1$, примем значение $x_2 = -1$ и подставим в полученное уравнение регрессии. Получили зависимость

$$y = 52{,}57 + 5{,}42x_1 - 2{,}85 + 1{,}75 - 4{,}74\,(x_1)^2 - 1{,}37 - 0{,}63\,x_1 + 0{,}74\,x_1 = 50{,}1 + 5{,}53\,x_1 - 4{,}74\,(x_1)^2.$$

Наблюдаем изменение свободного члена, из этого следует, что значение прочности уменьшится. Вид параболы не изменится, т.к. коэффициент b_{11} не изменился. Не изменилось и положение вершины параболы (рис. 2, кривая 2). Аналогично анализируется влияние на отклик других факторов.

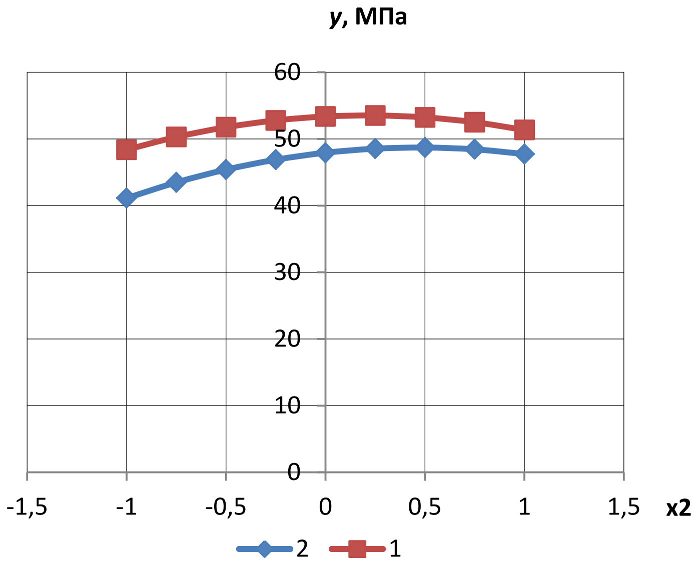

Рис. 2. Графики зависимостей $y = f(M)$

Исследуем полученное уравнение для нахождения оптимальных условий функционирования объекта. Определим значения факторов, при которых функция отклика в модели

$$y_3 = 52{,}57 + 5{,}42x_1 + 2{,}85x_2 + 1{,}75x_3 - 4{,}74(x_1)^2 - 1{,}37(x_2)^2 + 0{,}63x_1x_2 + 0{,}74x_1x_3,$$

т.е. прочность СУБ в возрасте 28 сут. будет максимальной.

Разложим уравнение на систему квазиоднофакторных моделей:

$$y_1 = 5{,}42x_1 - 4{,}74(x_1)^2 + 0{,}63x_1x_2 + 0{,}74x_1x_3;$$

$$y_2 = 2{,}85x_2 - 1{,}37(x_2)^2 + 0{,}63x_1x_2;$$

$$y_3 = 1{,}75x_3 + 0{,}74x_1x_3.$$

Для всех моделей выполняется условие:

$$|b_i| \geq \sum_j |b_{ij}|. \tag{34}$$

В соответствии с методикой этапа 1 определяем оптимальные значения факторов x_1 и x_2:

$$x_{3опт} = 1,\ \text{так как}\ b_1 > 0\ (1{,}75).$$

Для моделей (4,5) $b_{ii} < 0$, поэтому $x_{1,2опт}$ определяется как функция

$$x_{i\,в} = x_{i\,опт} = \frac{-b_i}{2b_{ii}} - \sum_{i\neq j} \frac{b_{ij}x_j}{2b_{ii}} \tag{35}$$

$$x_{1опт} = -5{,}42/(2\cdot(-4{,}74)) - (0{,}63+0{,}74)/(2\cdot(-4{,}74)) = -5{,}42/(-9{,}48) - (1{,}37)/(-9{,}48) = 0{,}57 + 0{,}144 = 0{,}714;$$

$$x_{2опт} = -2{,}85/(2\cdot(-1{,}37)) - (0{,}63)/(2\cdot(-1{,}37)) = 1{,}04 + 0{,}23 = 1{,}27;$$

$$y_{опт} = 52{,}57 + 5{,}42\cdot 0{,}714 + 2{,}85\cdot 1{,}27 + 1{,}75 - 4{,}74(0{,}714)^2 - 1{,}37(1{,}27)^2 + 0{,}63\cdot 0{,}714\cdot 1{,}27 + 0{,}74\cdot 0{,}714 = 58{,}28.$$

Выводы

В курсовой работе были изучены прочность на сжатие самоуплотняющегося бетона (в нормативном возрасте при нормальных условиях твердения) от различных технологических факторов: количества портландцемента, количества микронаполнителя и гиперпластификатора — варьируемых факторов; песка, щебня и воды — зафиксированных факторов. Для получения данных были проведены 14 различных замесов бетонной смеси и их дальнейшее испытание в нормативном возрасте. Эмпирические данные были использованы для математических расчетов и построения уравнения регрессии. Анализируя данное уравнение, можно сделать следующие практические выводы:

1. Количество портландцемента оказывает существенное воздействие на прочность СУБ, при этом зависимость является квадратичной. Следовательно, увеличение данного фактора в СУБ имеет основание, но до определенного предела.
2. Зависимость между количеством микронаполнителя и прочностью СУБ является линейной, т.е. с увеличением микрокремнезёма увеличивается прочность бетона в нормативном возрасте.
3. С увеличением вводимого гиперпластификатора (в заданных диапазонах варьирования) в бетонную смесь происходит увеличение прочности.
4. Максимальная расчетная прочность самоуплотняющегося бетона составила 58,28 МПа. Для достижения данного значения необходимо следующее соотношение компонентов (на 1 м^3): портландцемент — 499,8кг/м^3; микронаполнитель (микрокремнезём) — 96,52 кг/м^3; гиперпластификатор — 8 кг/м^3; песок — 800 кг/м^3; щебень — 900 кг/м^3; вода — 150 кг/м^3.

9. ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. Объект исследования. Его схематическое изображение.
2. В каком случае эксперимент является пассивным, а в каком активным?
3. Что в представленной работе является фактором, а что выходным параметром?
4. Требования, предъявляемые к факторам при планировании эксперимента.
5. Какие факторы являются контролируемыми, а какие неконтролируемыми?
6. Что значит многофакторная или однофакторная модель?
7. Последовательность действий при проведении эксперимента с целью построения регрессионной модели.
8. Как определялось число опытов в описываемом эксперименте?
9. На каких уровнях варьируются факторы, исследуемые в описываемом эксперименте?
10. Область значений и диапазон варьирования факторов, исследуемых в описываемом эксперименте.
11. Натуральные и нормализованные обозначения фактора.
12. Принцип построения матрицы проводимого эксперимента.
13. Как выбирался вид модели для описания проводимого эксперимента?
14. Для каких экспериментов применяется модель первого порядка?
15. Слагаемые моделей второго порядка.
16. В чем заключается суть метода наименьших квадратов?
17. Какой статистический критерий используется для оценки значимости коэффициентов регрессии?
18. Какой статистический критерий используется для проверки адекватности регрессионной модели?

Библиографический список

1. Статистические методы решения технологических задач : учебное пособие / О.В. Александрова, Т.А. Мацеевич, Л.В. Кирьянова [и др.] ; Московский государственный строительный университет. — Москва : МГСУ, 2015. — 160 с. — ISBN 978-5-7264-11076-0.
2. Сидняев Н.И. Введение в теорию планирования эксперимента : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Н.И. Сидняев, Н.Т. Вилисова. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 463 с. — ISBN 978-5-7038-3365-0.
3. Соловьев В.П. Организация эксперимента : учебное пособие для вузов / В.П. Соловьев, Е.М. Богатов. — Старый Оскол : ТНТ, 2012. — 255 с. : ил., табл. — Библиогр.: с. 235. — ISBN 978-5-94178-302-1.
4. Жуков А.Д. Технологическое моделирование : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 270800 «Строительство» (профиль «Производство и применение строительных материалов, изделий и конструкций») / А.Д. Жуков ; Московский государственный строительный университет. — Москва : МГСУ, 2013. — 203 с. — ISBN 978-5-7264-0780-7.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов; [материал соотв. требованиям основных образовательных программ для подготовки бакалавров, для подготовки специалистов] / В.Е. Гмурман. — 12-е изд., перераб. — Москва : Высшее образование : Юрайт, 2009. — 479 с. : ил., табл. — (Основы наук). — Предм. указ.: с. 474-479. — ISBN 978-5-9692-0391-4.
6. Хамханов К.М. Основы планирования эксперимента. Методическое пособие / К.М. Хам ханов. — Улан-Удэ : Изд-во Восточно-сибирского государственного технологического университета, 2001. — 94 с.
7. Яковлев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / В.П. Яковлев. — 3-е изд. — Москва : Дашков и К, 2012. — 181 с. : ил., табл. — Библиогр.: с. 179-181.
8. Ермаков С.М. Математическая теория оптимального эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. — Москва : Наука, 1987. — 318 с.
9. Дворкин Л.И. Оптимальное проектирование составов бетона / Л.И. Дворкин. — Львов: Вища школа, 1981.
10. http://www.sovstroymat.ru/
11. http://www.rifsm.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения *F*–критерия Фишера

(f_1 — число степеней свободы большей дисперсии, f_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

f_2	f_1														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	∞
***q* = 0,05**															
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,94	5,91	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,2	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,01	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	1,98	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	1,96	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,94	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,92	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,90	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,88	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,87	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,85	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,74	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,65	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,55	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,46	1,00

Таблица 2

Значения коэффициента Кохрена (*G*–критерия) для доверительной вероятности *p* = 95 % (*q* = 0,05) и числе степеней свободы f_1 и f_2

f_2	f_1										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	0797	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	7276	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	5950	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Все значения *G*-критерия меньше единицы, поэтому в таблице приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей нужно ставить ноль целых. Например, при $f_1 = 6$, $f_2 = 3$ имеем $G_{0,95} = 0,5321$.

Таблица 3

Значения *t*-критерия Стьюдента

f	*q*		*f*	*q*		*f*	*q*	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
1	12,71	63,66	14	2,14	2,98	27	2,05	2,77
2	4,30	9,92	15	2,13	2,95	28	2,05	2,76
3	3,18	5,84	16	2,12	2,92	29	2,05	2,76
4	2,78	4,60	17	2,11	2,90	30	2,04	2,75
5	2,57	4,03	18	2,10	2,88	40	2,02	2,70
6	2,45	3,71	19	2,09	2,86	50	2,01	2,68
7	2,36	3,50	20	2,09	2,85	60	2,00	2,66
8	2,31	3,36	21	2,08	2,83	80	1,99	2,64
9	2,26	3,25	22	2,07	2,82	100	1,98	2,63
10	2,23	3,17	23	2,07	2,81	120	1,98	2,62
11	2,20	3,11	24	2,06	2,80	200	1,97	2,60
12	2,18	3,05	25	2,06	2,79	500	1,96	2,59
13	2,16	3,01	26	2,06	2,78	∞	1,96	2,58